Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice 72: Buďte f, f_n, $n\in\mathbb{N}$ def. na M.

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n\geq n_0: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

bodová konvergence ($f_n \to f$ na M).

Lemma 74 (O σ_n) Buďte f_n, f def. na $M\neq\emptyset$.

Označme $\sigma_n := \sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|$

Pak $\boxed{f_n\rightrightarrows f}$ na M $\iff$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0}$.

Příklad: $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $x\in[0,1]=M$

$$\sigma_n=\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)| =$$

$$=\sup_{x\in[0,1]}|x^n-x^{2n}-0| = \max_{x\in(0,1]}|x^n-x^{2n}|$$

$$\left[f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0.\right]$$

$$f_n'(x) = nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=0$$

$$\iff \quad nx^{n-1}=2nx^{n-1}\cdot x^n$$

$$1=2x^n$$

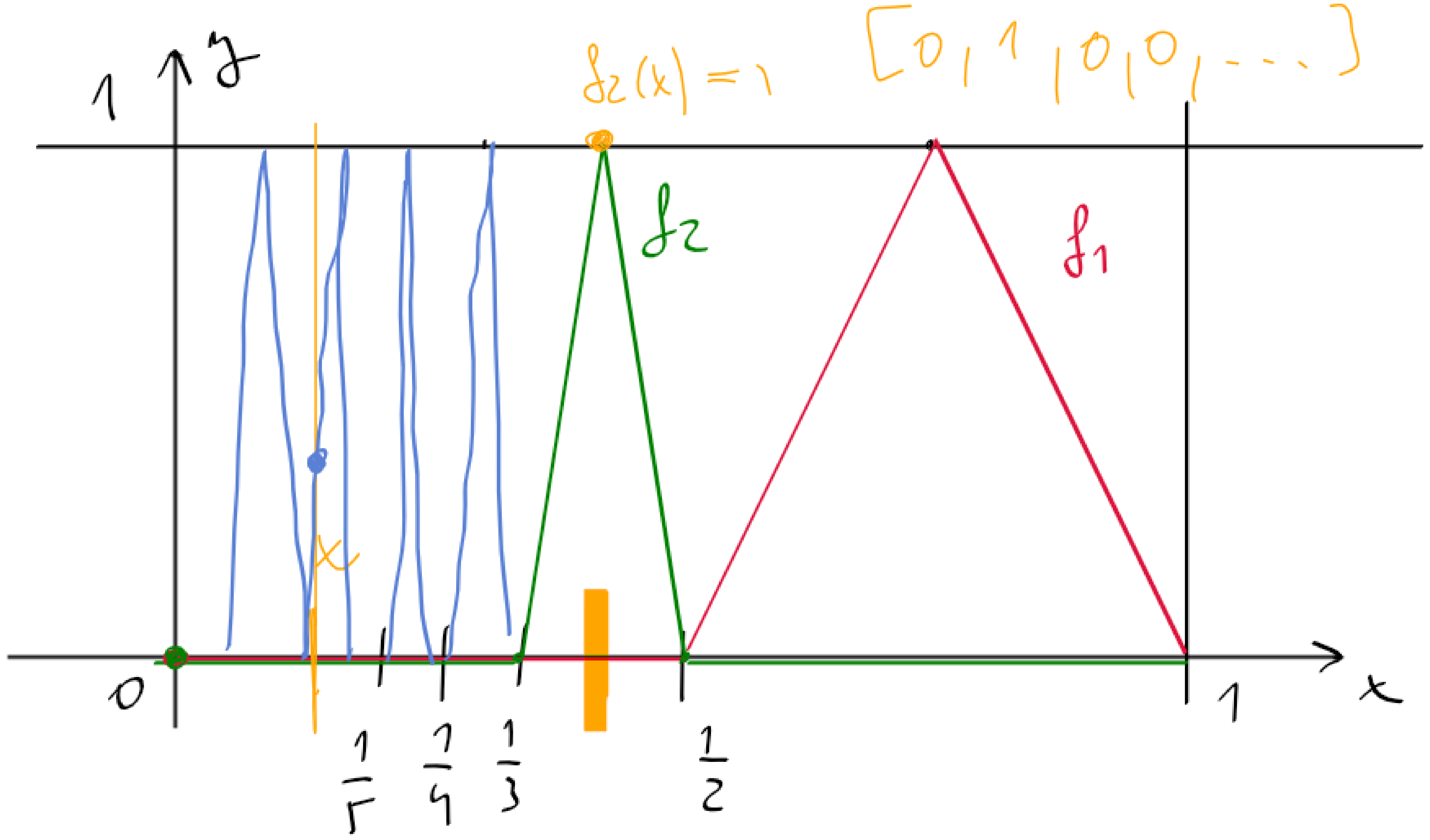
$$x=\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \qquad [x\neq 0]$$

$$f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac12}\right)=\left(\sqrt[n]{\tfrac12}\right)^n-\left(\sqrt[n]{\tfrac12}\right)^{2n}=\frac12-\left(\frac12\right)^2=$$

$$=\frac14=\sigma_n \not\to 0.$$

Tedy $f_n \not\rightrightarrows$ na $[0,1]$.

Příklad 75: („Klouzající hrb") Existuje posloupnost fcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejně omezených a spojitých funkcí na $[0,1]$, že $f_n\to 0 \wedge f_n\not\rightrightarrows 0$.



ATD. $[\{f_n(x)\} : 0, 0, 0, a, 0, 0, \dots]$

f_n jsou omezené konst. 1, spojité na $[0,1]$.

(a) $f_n \longrightarrow 0$ (kde 0 myslím nulovou fci na $[0,1]$)

- $\underline{x = 0}$: $f_n(x) = f_n(0) = 0$

  Tedy $f_n(x) \to 0$.

- $\underline{x > 0}$, $x \in [0,1]$:

  Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že $\frac{1}{n_0} < x$

  Pak $\forall n \geq n_0$ platí $f_n(x) = 0$.

  Tedy $\lim f_n(x) = 0$

  („lim. nezáleží na prvních konečně mnoha členech").

Tedy celkem $f_n(x) \to 0$, $x \in [0,1]$.

(b) $f_n \not\rightrightarrows 0$. Podle L74:

$$\sigma_n = \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

Tj. $\sigma_n \not\to 0 \overset{L74}{\Longrightarrow} f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

(Tj. nekonverguje stejn. k ničemu.)

Tvrzení 76: Stejnoměrná k. zachovává:

(i) omezenost

(ii) neomezenost

Důkaz: (i) nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M, kde f_n jsou omezené. Chci: f je omezená.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \in M \ \forall n \geq n_0: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Pro $\varepsilon = 1$ tedy $\exists n_0$ ... $= 1$

Protože f_{n_0} je omezená $\Leftrightarrow \exists K > 0 \ \forall x \in M: |f_{n_0}(x)| < K$.

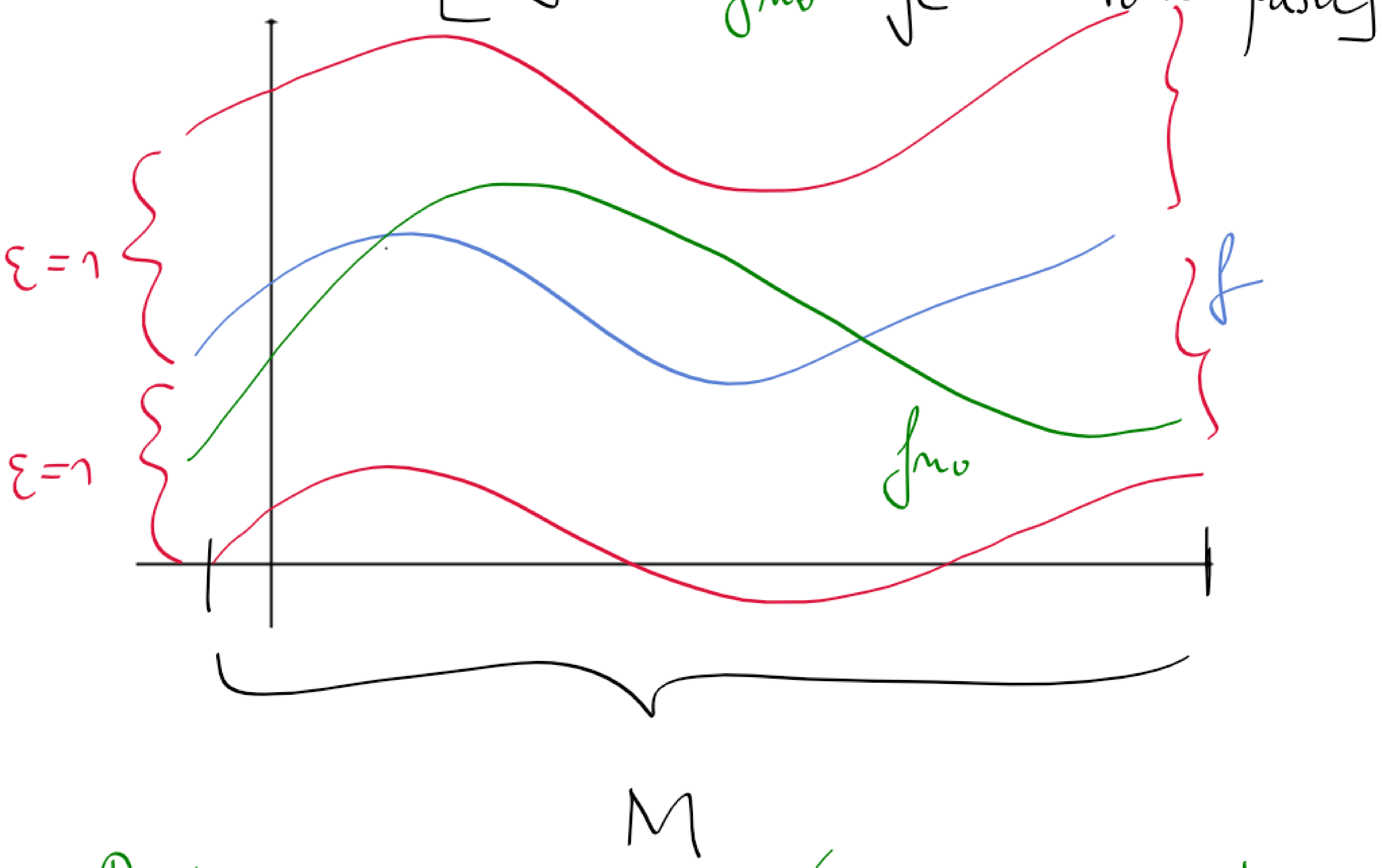
Celkem: $\forall x \in M$:

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq$$
$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon = 1} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{f_{n_0} \text{ je omezená } K} < 1 + K.$$

Tj. f je omezená (konstantou $K+1$).

(ii) neomezenost ... podobně. $\boxtimes$

[$\exists n_0$: f_{n_0} je v tom pásu]



Protože f_{n_0} je omezená a je na M „blízko" f (ε-blízko, kde $\varepsilon = 1$), musí být omezená i f.

Poznámka 77: Platí se snadnými Dk.:

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na $M \implies f_n \to f$ na M

(ii) $f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff f_{n+1} \rightrightarrows f$ na M

(iii) $A \subseteq M$, $f_n \rightrightarrows f$ na $M \implies f_n \rightrightarrows f$ na A

(iv) $f_n \rightrightarrows f$ na $M_1, \dots, M_p \implies$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \text{ na } \bigcup_{i=1}^{p} M_p =: M$$

($\underline{\text{Dk}}$: $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$.)

(v) M je konečná $\implies$

$$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \iff f_n \to f \text{ na } M\right).$$

Věta 78: Nechť f_n, f, g_n, g jsou def. aspoň na M. Nechť $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ na M. Pak (i) $f_n + g_n \rightrightarrows f+g$ na M

(ii) $c \cdot f_n \rightrightarrows c \cdot f$ na M.

Důkaz: (i) $\varepsilon > 0$ dáno. Podle definice $f_n \rightrightarrows f$, resp. $g_n \rightrightarrows g$ (na M):

$$\exists n_1\ \forall n \geq n_1\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_2\ \forall n \geq n_2\ \forall x \in M : |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Pak $\forall n \geq n_0\ \forall x \in M$:

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\substack{n \geq n_0 \geq n_1 \\ x \in M}} + \underbrace{|g_n(x) - g(x)|}_{\substack{n \geq n_0 \geq n_2 \\ x \in M}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Podobně. $\boxtimes$

Definice 79 (Stejn. konv. řady fcí)

Buďte u_n $(n \in \mathbb{N})$ fce def. aspoň na M. Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ rozumíme řadu fcí; dosazením $x \in M$ dostaneme řadu čísel $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje bodově (resp. stejnoměrně) na M, jestliže posloupnost částečných součtů $s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$ (posl. funkcí!) konverguje bodově (resp. stejn.) na M, tj. pokud existuje funkce s (součet řady fcí), že $s_N \xrightarrow{N\to\infty} s$ (resp. $s_N \rightrightarrows s$) na M.

Píšeme: • $\sum u_n(x) = s(x)$, $x \in M$ $\iff$ $s_N \to s$ na M

• $\sum u_n \rightrightarrows s$ na M $\iff$ $s_N \rightrightarrows s$ na M

• Běžně i $\sum u_n \rightrightarrows$ tj. bez udání součtové funkce.

Pozn. So: • $\sum u_n \rightrightarrows s$ na M $\Rightarrow$ $\sum u_n(x) = s(x)$, $x \in M$

(„stejn. K. $\Rightarrow$ bodová K.")

• V78 pro řady: (Dk. Cv.)

$\sum u_n \rightrightarrows s_1$, $\sum v_n \rightrightarrows s_2$ na M $\Rightarrow$ $\sum (u_n + v_n) \rightrightarrows s_1 + s_2$ na M.

Věta 81: (nutná podmínka $\sum \rightrightarrows$)

$$\sum u_n \rightrightarrows \text{ na } M \implies u_n \rightrightarrows 0 \text{ na } M$$

Důkaz: Podle předpokladu $\exists$ fce s:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \rightrightarrows \boxed{s} \text{ na } M.$$

Podle Pozn 77: $s_{N+1} \rightrightarrows \boxed{s}$ na M.

Tedy $u_{N+1} = s_{N+1} - s_N \rightrightarrows \boxed{s} - \boxed{s} = 0$ na M

podle V78 ⊠

Lemma 82: (O řadách čísel - mohlo v 1. SEM.)

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada $\mathbb{R}$-čísel. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \iff \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = z_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}^{S_4} + \overbrace{a_5 + a_6 + a_7 + \dots}^{z_4}$$

Důkaz: ($\Leftarrow$) Pokud $z_N \to 0$, musí ex. N_0, že $z_{N_0} < \infty$ (TRIV.).

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{N_0}}_{< \infty} + \underbrace{z_{N_0}}_{< \infty} < \infty$

($\Rightarrow$) nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pak

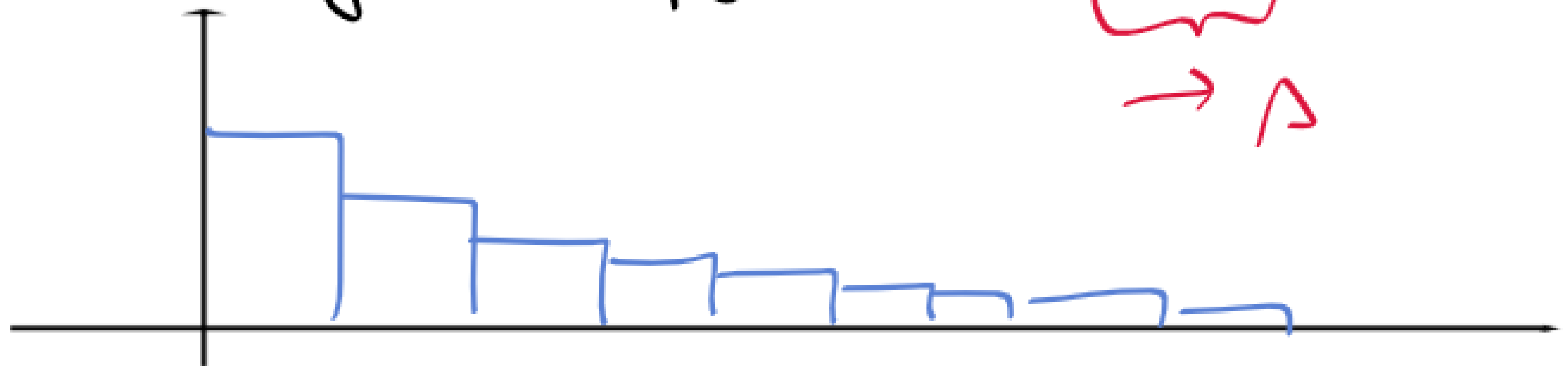
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_N + z_N} < \infty \quad (N \in \mathbb{N})$$

Takže $z_N < \infty$, $N \in \mathbb{N}$. Označme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Tedy $\forall N \in \mathbb{N}$: $\boxed{s_N + z_N = s}$

Tj. $z_N = s - \underbrace{s_N}_{\to s} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ ⊠



Věta 83: (Weierstrassovo kritérium)

Buďte u_n ($n \in \mathbb{N}$) def. aspoň na M.

nechť: (i) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in M$: $\boxed{|u_n(x)| \le a_n}$

(Tj. u_n je omezená na M konstantou a_n.)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. (číselná řada!)

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na M.

Důkaz: Podle předp. $\forall x \in M$:

$|u_n(x)| \le a_n \ \wedge \ \sum a_n$ K.

Tedy, podle srovnávacího kritéria,

$\sum |u_n(x)| < \infty$ ($\sum a_n$ je KONV. MAJ.)

Tedy $\sum u_n$ konverguje bodově. (AK ⇒ K)

Označme $s(x) := \sum u_n(x)$ ... „součtová fce"

Chci: $\sum u_n \rightrightarrows s$ na M,

tj. chci: $s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n \rightrightarrows s$ na M.

Použijeme Lemma o σ_n:

$$\sigma_N := \sup_{x \in M} |s_N(x) - s(x)| =$$

$$= \sup_{x \in M} \left| s(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| =$$

$$= \sup_{x \in M} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right| \overset{(*)}{\le}$$

$$\overset{(*)}{\le} \sup_{x \in M} \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(x)| \overset{(i)}{\le} \sup_{x \in M} \overbrace{\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \right)}^{\text{nezávisí na } x}.$$

$$\overset{a_n \ge 0}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \xrightarrow{N \to \infty} 0 \text{ podle L72}$$

$\Rightarrow \sigma_N \to 0$ (Lo2P)

Tedy podle L o σ_n: $s_N \rightrightarrows s$ na M. ☒